

دمای جسد و تخمین زمان مرگ با استفاده از معادلات دیفرانسیل

سعید محمدیان سمنانی* - دکتر یلدا زرگر**

* کارشناس ارشد ریاضیات کاربردی، عضو هیأت علمی دانشگاه سمنان

** متخصص پزشکی قانونی، اداره کل پزشکی قانونی استان سمنان

چکیده

زمینه و هدف: تخمین زمان مرگ یکی از مهم‌ترین و پیچیده‌ترین مسایل پزشکی قانونی است که به دلیل وابستگی به شرایط محیطی و عوامل درونی جسد، هرگز نمی‌توان آن را به طور دقیق تعیین نمود. این مقاله روشی ارایه می‌دهد که با استفاده از روش‌های ریاضیات می‌توان زمان سپری شده از مرگ و مدت زمانی را که جسد در محلی غیر از محل کشف آن قرار داشته است را محاسبه نمود.

روش بررسی: با به کارگیری «تبدیلات لاپلاس» در حل معادلات دیفرانسیل و استفاده از قانون «سرد شدن نیوتن» و با استفاده از داده‌هایی شامل دمای جسد و محیط‌های قرارگیری آن به حل دو مثال جداگانه می‌پردازیم.

یافته‌ها: در مثال اول که جسد از زمان مرگ تا زمان کشف آن در محیط واحدی بوده است زمان سپری شده از مرگ با استفاده از حل معادلات دیفرانسیل مربوطه در شرایط اولیه به دست می‌آید. در مثال دوم که مرگ در محلی متفاوت از محل کشف جسد رخ داده است مدت زمانی که جسد در محل اولیه قرار داشته است با استفاده از «تابع پله‌ای واحد» و بیان دمای دو محیط با حل معادلات دیفرانسیل مربوطه، زمان مرگ محاسبه می‌گردد.

نتیجه‌گیری: در موارد ثابت بودن محل جسد، زمان گذشته از مرگ را می‌توان با داده‌هایی شامل دمای محیط و جسد محاسبه نمود و در مواردی که جسد جابجا شده باشد با داده‌هایی شامل دمای محیط اولیه و دمای محیط کشف جسد و دمای جسد می‌توان مدت زمان قرارگیری جسد در محیط اولیه را به دست آورد.

واژگان کلیدی: تخمین زمان مرگ، معادلات دیفرانسیل

پذیرش مقاله: ۱۳۸۵/۳/۳۱

وصول مقاله: ۱۳۸۴/۱۰/۱۸

نویسنده پاسخگو: سمنان - جاده دامغان - دانشگاه سمنان - دانشکده علوم پایه - گروه ریاضی saiidmohammadian@yahoo.com

مقدمه

جسد انسان پس از مرگ به تدریج سرد می‌شود. یک جسد آزمایشگاهی یکنواخت و بر اساس قانون «سرد شدن نیوتن» سرد می‌شود. بر طبق این قانون سرعت سرد شدن با تفاوت دمای سطح بدن و محیط اطراف رابطه مستقیم دارد. از نظر نموداری این دو متغیر با هم یک منحنی نمایی^۱ - و نه یک خط مستقیم - می‌سازند.

جسد انسان دقیقاً از قانون نیوتن تبعیت نمی‌کند ولی میزان انحراف از آن به عوامل متعددی از جمله سن، وزن، البسه، جریان هوا، رطوبت محیط و ... بستگی دارد. با حدوث مرگ، انتقال گرما در داخل بدن از طریق جریان خون متوقف می‌شود. تولید متابولیک گرما که عمدتاً در عضلات و کبد صورت می‌گیرد کاملاً متوقف نشده، برای مدتی، تولید گرما به طور نسبی ادامه می‌یابد. پس از مرگ، پوست بدن

گرچه مطالعه سرعت سرد شدن جسد به علم فیزیولوژی مربوط می‌شود، ولی کاربرد آن در تخمین زمان فوت، آن را به یک موضوع شایع در پزشکی قانونی تبدیل کرده است. از زمان‌های قدیم می‌دانستند، جسد پس از مرگ به تدریج سردتر می‌شود ولی اندازه‌گیری علمی این پدیده به قرن ۱۹ و دکتر جان داوی برمی‌گردد که در سال ۱۸۳۹ در جنگ مالت و بریتانیا با استفاده از دماسنج جیوه‌ای دمای بدن سربازان کشته شده را اندازه‌گیری کرد. پس از آن مطالعات زیادی در این مورد انجام شده و پدیده‌هایی مثل دمای مرکزی بدن، شیب گرمایی، تأثیر عایق‌سازی بدن و کفه (Plateau) دمایی اولیه شناسایی شد. اگر درجه حرارت محیط ۳۷ درجه سانتیگراد یا بیش از آن نباشد،

1 - Exponential

قرارگیری جسد در محلی غیر از محل کشف آن، با استفاده از دو مثال به بررسی این مطالب می پردازیم:

مثال یک:

یک صحنه جرم را که در آن یک فرد به قتل رسیده است در نظر بگیرید به طور مثال صاحب یک طلا فروشی در مغازه اش به قتل رسیده است و جسد او ساعت ۷ صبح روز بعد در مغازه اش کشف شده است. پزشکی قانونی دمای بدن مقتول را در ساعت ۷ صبح، ۲۲/۵ درجه سانتیگراد و یک ساعت بعد یعنی ساعت ۸ صبح، دمای بدن مقتول را ۲۲ درجه سانتیگراد برآورد کرده است. اگر فرض کنیم که دمای محیط مغازه در طول شب ثابت و برابر ۲۰ درجه سانتیگراد بوده می خواهیم تخمین بزنیم که مرگ در چه ساعتی اتفاق افتاده است. اگر دمای بدن متوفی را در لحظه t با $T(t)$ نشان دهیم و فرض کنیم که دمای بدن او در لحظه مرگ 37° سانتیگراد بوده یعنی $T(0) = 37$. همچنین فرض می کنیم مدت زمانی که از مرگ فرد گذشته است t_c باشد؛ بنابراین

$$T(t_c) = 22.5^{\circ}$$

$$T(t_c + 1) = 22^{\circ}$$

و دمای محیط را با $T_a(t)$ نشان می دهیم یعنی

$$T_a(t) = 20^{\circ}$$

بنابر «قانون سرد شدن نیوتن» داریم:

$$\frac{dT}{dt} = -K(T(t) - T_a(t))$$

و یا

$$T'(t) = -K(T(t) - T_a(t))$$

با محاسبه تبدیل لاپلاس طرفین تساوی اخیر داریم:

$$L\{T'(t)\} = -L\{K(T(t) - T_a(t))\}$$

$$-T(0) + SL\{T(t)\} = -KL\{T(t)\} + KL\{T_a(t)\}$$

$$(S + K)L\{T(t)\} = KL\{T_a(t)\} + T(0)$$

$$L\{T(t)\} = \frac{K}{S + K}L\{T_a(t)\} + \frac{T(0)}{S + K}$$

اکنون با محاسبه تبدیل لاپلاس معکوس داریم

$$T(t) = \int_0^t K T_a(z) e^{-K(t-z)} dz + T(0) e^{-Kt}$$

$$T(t) = T(0) e^{-Kt} + K e^{-Kt} \int_0^t T_a(z) e^{Kz} dz$$

از آنجایی که $T(0) = 37$ و $T_a(t) = 20$ پس

به سرعت سرد می شود، زیرا به علت ایست قلبی جریان خون گرم به سوی آن از حرکت باز می ایستد. سرعت سرد شدن پوست به البسه جسد، طرز قرارگیری آن، نوع و ساختار سطح زیرین و مهم تر از همه دمای محیط بستگی دارد. داخل بدن تا زمان برقراری شیب گرمایی در سطح پوست سرد نمی شود. نسوج بدن نسبت به گرما عایق بوده و ایجاد شیب گرمایی به زمان نیاز دارد. به همین دلیل دماسنجی که در نزدیکی مرکز بدن (معمولاً در رکتوم) قرار داده می شود تا مدتی سقوط دما را نشان نمی دهد. قسمت مرکزی نمودار سرد شدن بدن نسبتاً مستقیم یا دارای انحنای کمی بوده و تقریباً بر قانون نیوتن منطبق است و با کم شدن تفاوت دمای بدن و محیط اطراف، نمودار نیز در انتها به تدریج مسطح می شود. قسمت مرکزی و شیب دارتر نمودار در پزشکی قانونی کاربرد دارد.

از نظر تئوری، اگر دمای جسد در زمان فوت 37° درجه فرض شود، با یافتن نقطه ای از نمودار که دمای اندازه گیری شده از رکتوم را نشان می دهد و با توجه به نقطه 37° درجه که صفر منحنی از نظر زمانی است، می توان زمان فوت را محاسبه نمود. متأسفانه دخالت برخی متغیرها این فرض جالب را غیر عملی می سازند. خود این متغیرها نیز در طی زمان قبل از کشف جسد تغییر می کنند مثلاً از زمان فوت تا زمان کشف جسد دمای محیط ممکن است دچار تغییرات متعددی شود و اغلب پاتولوژیست نمی تواند این تغییرات را ثبت کند، ضمن اینکه احتمال جابجایی جسد نیز وجود دارد که در این مقاله این مورد، بررسی می شود به این صورت که با استفاده از معادلات دیفرانسیل طی مثال هایی با حل دو مسأله جداگانه، روش تخمین زمان مرگ و تعیین مدت زمان قرارگیری جسد در محلی غیر از محل کشف جسد، بررسی می گردد. در اهمیت تخمین زمان مرگ شکی وجود ندارد و تعیین مدت زمان قرارگیری جسد در محلی غیر از کشف جسد می تواند در ارزیابی صحت گفته های متهم یا متهمین به قتل یا شاهدان احتمالی مفید باشد.

روش بررسی

در این بررسی، با استفاده از «تبدیلات لاپلاس» در حل معادلات دیفرانسیل و استفاده از قانون «سرد شدن نیوتن» به محاسبه زمان مرگ و مدت زمان قرارگیری جسد در محل غیر از کشف جسد پرداختیم. برای این محاسبه از داده هایی نظیر دمای جسد و دمای محیط های قرارگیری جسد استفاده کردیم. شرح محاسبات در بخش یافته ها آمده است.

یافته ها

جهت روشن شدن روش استفاده از فرمول های ریاضی حل معادلات دیفرانسیل در تخمین زمان فوت و تخمین مدت زمان

و سپس تابعی به صورت زیر تعریف می کنیم

$$f(t) = \begin{cases} 4; 0 \leq t \leq b \\ 20; b < t \end{cases}$$

تابع اخیر را به کمک تابع پله ای واحد بصورت زیر می نویسیم

$$f(t) = 4 + 16 H(t - b)$$

$$H(t - b) = \begin{cases} 1; t \geq b \\ 0; t < b \end{cases}$$

در این صورت تابع $f(t)$ باید به جای $T_a(t)$ در حالت قبلی

قرار گیرد یعنی

$$T(t) = T(0)e^{-Kt} + Ke^{-Kt} \int_0^t [4 + 16 H(t - b)] e^{Kz} dz$$

$$T(t) = T(0)e^{-Kt} + Ke^{-Kt} \left(\int_0^b 4e^{Kz} dz + 20 \int_b^t e^{Kz} dz \right)$$

$$T(t) = T(0)e^{-Kt} + Ke^{-Kt} \left[\left[\frac{4}{K} e^{Kz} \right]_0^b + \left[\frac{20}{K} e^{Kz} \right]_b^t \right]$$

$$T(t) = T(0)e^{-Kt} + Ke^{-Kt} \left[\frac{4}{K} e^{Kb} - \frac{4}{K} + \frac{20}{K} e^{Kt} - \frac{20}{K} e^{Kb} \right]$$

$$T(t) = T(0)e^{-Kt} + (-4e^{-Kt} + 20 - 16e^{Kb}e^{-Kt})$$

$$T(t) = e^{-Kt} [T(0) - 16e^{Kb} - 4] + 20$$

$$T(0) = 37, T(7) = 22.5, T(8) = 22 \text{ حال چون}$$

پس

$$22.5 = e^{-7K} [37 - 16e^{Kb} - 4] + 20$$

$$22 = e^{-8K} [37 - 16e^{Kb} - 4] + 20$$

$$2.5 = e^{-7K} [33 - 16e^{Kb}] (**)$$

$$2 = e^{-8K} [33 - 16e^{Kb}]$$

$$\frac{2.5}{2} = e^K \Rightarrow K = \ln(1.25) = 0.223$$

مشاهده می شود که این همان K یی است که در حالت قبل

به دست آمد و این موضوع طبیعی است زیرا برای همان جسد است.

اکنون با جاگذاری این مقدار K در رابطه $(**)$ داریم

$$2.5 = e^{-7(0.223)} (33 - 16e^{0.223b})$$

$$11.91 = 33 - 16e^{0.223b}$$

$$-21.09 = -16e^{0.223b} \Rightarrow 1.32 = e^{0.223b}$$

$$b \approx 1.24 \text{ و از آنجا}$$

بنابراین جنازه حدود یک ساعت و چهارده دقیقه بیرون مغازه

$$T(t) = 37e^{-Kt} + Ke^{-Kt} \int_0^t 20e^{Kz} dz$$

$$T(t) = 37e^{-Kt} + 20Ke^{-Kt} \left[\frac{1}{K} e^{Kt} - \frac{1}{K} \right]$$

$$T(t) = 37e^{-Kt} + 20(1 - e^{-Kt})(1)$$

و از آنجا

$$T(t) = 17e^{-Kt} + 20$$

بنابراین

$$T(t_c) = 17e^{-Kt_c} + 20$$

باید از رابطه اخیر K و همچنین t_c یعنی مدت زمانی که از

مرگ گذشته را بیابیم با اعمال دو شرط اولیه

$$T(t_c) = 22.5, T(t_c + 1) = 22$$

داریم

$$T(t_c) = 22.5 = 17e^{-Kt_c} + 20$$

$$T(t_c + 1) = 22 = 17e^{-K(t_c + 1)} + 20$$

$$2.5 = 17e^{-Kt_c} (*)$$

$$2 = 17e^{-K(t_c + 1)}$$

$$\Rightarrow \frac{2.5}{2} = e^K \Rightarrow K = \ln(1.25)$$

$$\Rightarrow K \approx 0.223$$

اکنون با جاگذاری K در رابطه $(*)$ داریم

$$2.5 = 17e^{-0.223t_c}$$

$$\frac{2.5}{17} = e^{-0.223t_c}$$

$$-1.917 = -0.223 t_c \Rightarrow t_c \approx 8.6$$

بنابراین مرگ تقریباً ۸ ساعت و ۳۶ دقیقه قبل (قبل از ساعت

۷ صبح) رخ داده است یعنی تقریباً در ساعت ۱۰:۲۴ صورت گرفته است.

مثال دو:

اکنون فرض کنیم که با بررسی دقیق تر پلیس به این

نتیجه رسیده است که جنازه مدتی بیرون مغازه نگه داشته شده

و سپس به داخل مغازه آورده شده است پس در این وضعیت

تخمین زمان مرگ به روش قبلی صحیح نمی باشد. تحت همان

شرایط قبلی یعنی $T(0) = 37, T(8) = 22, T(7) = 22.5$ و

$T_a(t) = 20$ دمای درون مغازه در طول شب و نیز با فرض اینکه

دمای بیرون مغازه ۴ درجه سانتیگراد باشد مدت زمانی که جسد بیرون

مغازه بوده مساوی b قرار می دهیم

بوده است و بعداً به داخل مغازه منتقل شده است.

نتیجه گیری

با حل مسایل فوق نتیجه می شود که می توان با استفاده از داده های شامل دمای محیط یا محیط های قرارگیری جسد و دمای بدن در زمان کشف جسد و زمان های مشخص بعد از آن و با فرض دمای بدن ۳۷ درجه سانتیگراد در زمان مرگ، مدت زمان سپری شده از مرگ و در مواردی که جسد جابجا شده باشد با استفاده از فرمول های زیر، مدت زمان قرارگیری جسد در محیط اولیه را تعیین نمود.

$$K = \frac{1}{m} \cdot \ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$$

$$tc = \frac{\ln\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)}{-k}$$

$$b = \frac{1}{k} \cdot \ln\left(\frac{\lambda_1 - \alpha e^{ck}}{\lambda_2}\right)$$

k= ثابت جسد

tc = مدت زمان سپری شده از مرگ

C = زمان اندازه گیری اولیه دمای جسد (ساعت)

m= تفاضل زمانهای اندازه گیری دمای جسد (ساعت)

α = [دمای بدن در زمان کشف جسد- دمای محیط]

β = [دمای بدن در زمان بعدی از کشف جسد- دمای محیط]
 γ = [دمای محیط - (37°C) دمای بدن در زمان مرگ (ساعت)]
 b = مدت زمانی که جسد در محیط اول قرار داشته است (ساعت)
 λ_1 = [دمای محیط اول - (37°C) دمای بدن در زمان مرگ]
 λ_2 = [تفاضل دمای دو محیط قرارگیری جسد]
 $e \cong 2.718$ عدد نپر

البته کاملاً واضح است که هرچند محاسبات فوق از نظر علم ریاضی کامل و دقیق است ولی به لحاظ کار با محیط های بیولوژیک نظیر بدن انسان که عوامل متعددی مانع از افت خطی دمای پس از مرگ می شوند و نیز دمای محیط های قرارگیری جسد که ثابت فرض کردن آن که در محاسبات فوق انجام شده عملاً محال می باشد، منجر به تخمینی بودن و نه دقیق بودن نتایج حاصله می گردد. البته در صورتی که بتوان دماهای زمان های متفاوت، مثلاً در ۲۴ ساعت بعدی را با زمان قرارگیری جسد در آن محیط شبیه سازی کرد می توان با استفاده از درون یابی به روش ریاضی، زمان های دقیق تری را نیز ارایه نمود.

تقدیر و تشکر

با سپاس از سرکار خانم دکتر اصغری و جناب آقای دکتر قدیانی که در مراحل تدوین مقاله راهنمایمان بودند.

References

- 1- Knight B. Forensic Pathology. Second edition. USA: Oxford university; 1996. P: 427
- ۲ - محمدیان سمنانی سعید، کرامتی باقر. معادلات دیفرانسیل معمولی و کاربرد آنها، چاپ اول، سمنان، انتشارات دانشگاه سمنان، ۱۳۷۸، صفحه ۱۸۶-۱۷۶.